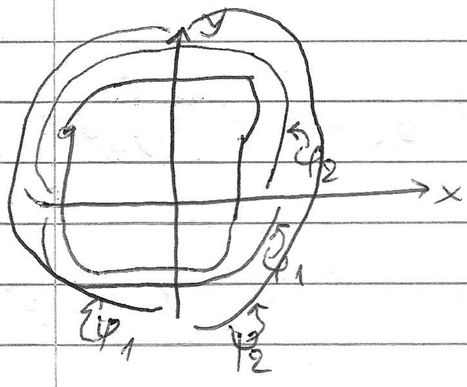
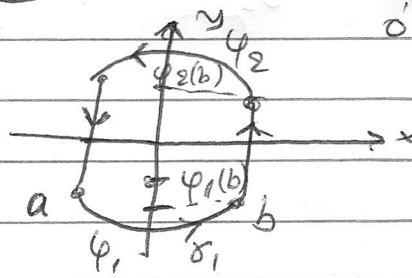
$\boxed{19/05/16}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} =$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d :\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$

$\partial D = \bar{\gamma}([\alpha, b])$



ΚΑΛΥΤΕΡΟ ΣΧΗΜΑ

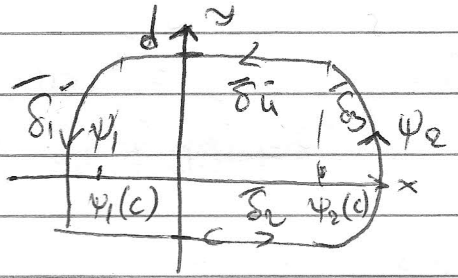


όπου $\bar{\gamma}_1(t) = (t, \varphi_1(t))$
$t \in [\alpha, b]$

$\bar{\gamma}_2(t) = (b, \varphi_1(b)) + t[(b, \varphi_2(b)) - (b, \varphi_1(b))]$
$t \in [0,1]$

$\bar{\gamma}_3(t) = (t, \varphi_2(t)),\ t \in [\alpha, b]$

$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_3$



$\partial D = \bar{\delta}([t_1, t_2]),\ \bar{\delta} = \bar{\delta}_1 \oplus \bar{\delta}_2 \oplus \bar{\delta}_3 \oplus \bar{\delta}_4$

$\bar{\delta}_1(t) = (\psi_1(t), t) \quad t \in [c, d]$

$\bar{\delta}_2(t) = (\psi_1(c), c) + t(\psi_2(c) - \psi_1(c), 0),\ t \in [0,1]$

$\bar{\delta}_3(t) = (\psi_2(t), t),\ t \in [c, d]$

$\bar{\delta}_4(t) = (\psi_1(d), d) + t(\psi_2(d) - \psi_1(d), 0),\ t \in [0,1]$

$$\int_{\partial D} (f_1, f_2) \cdot d(x,y) = \int_{\partial D} (f_1, 0) \cdot d(x,y) + \int_{\partial D} (0, f_2) \cdot d(x,y)$$

Είναι $\displaystyle\int_{\partial D} (f_1, 0) \cdot d(x,y) = \int_{\bar{\gamma}} (f_1, 0) \cdot d(x,y) = \underbrace{\int_{\bar{\gamma}_1} (f_1, 0) \cdot d(x,y)}_{(*)} + \int_{\bar{\gamma}_2} - \int_{\bar{\gamma}_3} - \int_{\bar{\gamma}_4}$

Επειδή πήραμε τις αντίστροφες

$\gamma_1 : (*) \displaystyle\int_{\alpha}^{b} \underbrace{(f_1(t, \varphi_1(t)), 0) \cdot (1, \varphi_1'(t))}_{= f_1(t, \varphi_1(t))} dt$

$\gamma_2 : (*) \displaystyle\int_0^1 (f_1(\bar{\gamma}_2(t)), 0) \cdot (0, \dots) dt = 0 \quad \| \quad \gamma_4 : \int_0^1 (f_1(\bar{\gamma}_4(t)), 0) \cdot (0, \dots) dt = 0$

$\gamma_3 : \displaystyle\int_{a}^{b} \underbrace{(f_1(t, \varphi_2(t)), 0) \cdot (1, \varphi_2'(t))}_{f_1(t, \varphi_2(t))} dt$

Άρα τελικά: $\displaystyle\int_{\partial D} (f_1, 0) \cdot d(x,y) = -\int_{a}^{b} \left(f_1(t, \varphi_2(t)) - f_1(t, \varphi_1(t)) \right) dt$

με τον ίδιο τρόπο $\partial D = \bar{\delta}([t_1, t_2])$

$$\circledast \int_{\partial D} (0, f_2)\cdot d(x,y) = \int_c^d \left[\left(f_2(\psi_2(t), t) - f_2(\psi_1(t), t)\right)\right] dt$$

άρα $$\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) d(x,y) = \int_c^d \left[f_2(\psi_2(y), y) - f_2(\psi_1(y), y)\right] dy -$$
$$- \int_a^b \left[f_1(x, \varphi_2(x)) - f_1(x, \varphi_1(x))\right] dx$$

$\longleftrightarrow$

<u>Πόρισμα (Θ. Green)</u>: $D \subset \mathbb{R}^2$ καλό χ. C^1 (καν. χωρίο ως προς Ox κ' Oy) με ∂D θετικά προσανατολισμένο. Τότε: $$v(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} \underbrace{(-y, x)}_{(f_1, f_2)(x,y)} \cdot d(x,y)$$

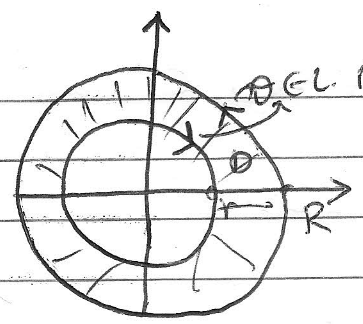
$$\Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -1 \xrightarrow{\text{Green}} \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y, x)\cdot d(x,y) = \frac{1}{2}\int_D \Big(\underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}}_{1} - \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial y}}_{-1}\Big) d(x,y)$$
$$= \int_D 1\, d(x,y) = v(D).$$

<u>Γενίκευση Θ. Green</u>: Έστω $D = \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_i\right) \subset \mathbb{R}^2$ με D_i καλά χ. C^1 καν. χωρία (ως προς Ox κ' Oy) με $\forall i \neq j$ $D_i \cap D_j = \emptyset$ ή $D_i \cap D_j = \partial D_i \cap \partial D_j$ και $f: U \to \mathbb{R}^2$ με $D \subset U$ συνεχώς διαφορ. $$\Rightarrow \int_{\partial D} (f_1, f_2)\cdot d(x,y) = \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) d(x,y)$$
όπου το επικ. ολοκλ. είναι το άθροισμα των επικ. ολοκλ. (*)

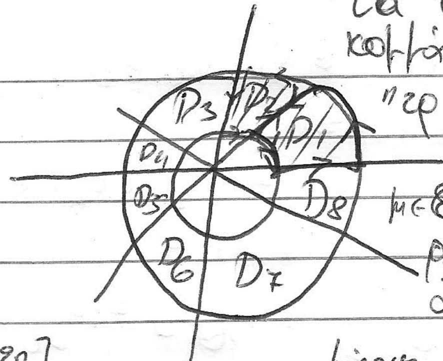
<u>Π.χ.</u>: (Ασκ 150) Επαληθεύστε το Θ. Green για τον δακτύλιο $D = \bar{B}((0,0), R) \setminus B((0,0), r)$ με $R > r$ και $f(x,y) = (2x^3 - y, x^3 + y^3)$

(*) κατά μήκος των κλ. τμ. του θετ. προσαν. ∂D

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)$



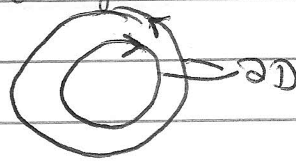
θετ. προσαν. ∂D.



Τα "ενδιάμεσα" κομμάτια τα "τρέχω" 2 φορές με κάθε φορά με διαφορετική κίνηση άρα στο τέλος μένει μόνο το ∂D

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$
$\rho \in [r, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) d(x,y) = 3 \int_D (x^2+y^2)\, d(x,y) =$$



$$\overset{(*)}{=} 3 \int_r^R \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho \, d\varphi \, d\rho = 3 \cdot 2\pi \int_r^R \rho^3 d\rho = 6\pi \frac{R^4 - r^4}{4}$$

$(*)$ $\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

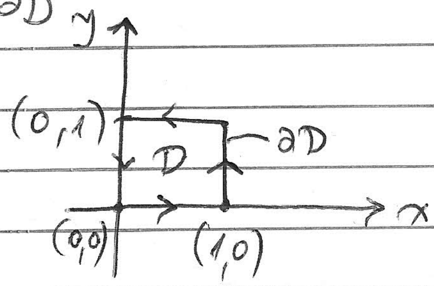
$$\bar{g}(\rho,\varphi) \Rightarrow |\det D\bar{g}(\rho,\varphi)| = \rho$$

Απ' ευθείας άλλη: $\displaystyle\int_{\partial D} \underbrace{(2x^3 - y^3,\ x^3 + y^3)}_{\bar{f}(x,y)} \cdot d(x,y) =$

$$= \int_{\gamma_R} \bar{f}(\bar{\gamma}_R(t)) \cdot \bar{\gamma}_R'(t)\, dt - \int_{\gamma_r} \bar{f}(\bar{\gamma}_r(t)) \cdot \bar{\gamma}_r'(t)\, dt$$

όπου $\bar{\gamma}_R(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
$\bar{\gamma}_r(t) = r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$I = \displaystyle\int_{\partial D} (2y, 6x) \cdot d(x,y)$, $D = [0,1] \times [0,1]$, ∂D: θετικά προσανατολισμένο ∂D.



$\partial D = \bar{\gamma}([t_1, t_2])$
$\bar{\gamma}_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0,1]$
$\bar{\gamma}_2(t) = (1,0) + t((1,1) - (1,0))$, $t \in [0,1]$
$\bar{\gamma}_3(t) = (1,1) + t((0,1) - (1,1))$, $t \in [0,1]$
$\bar{\gamma}_4(t) = (0, 1-t)$, $t \in [0,1]$ $(= (0,1) + t((0,0) - (0,1)))$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge \underset{\varphi_1(x)}{0} \le y \le \underset{\varphi_2(x)}{1}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 \wedge \underset{\psi_1(y)}{0} \le x \le \underset{\psi_2(y)}{1}\}$$

Άρα D: κατά τμ. C^1 κ' f είναι C^1 άρα

Green ⇒
$$I = \int_D (6-2)\, d(x,y) = 4\int 1\, d(x,y) =$$
$$= 4\int_0^1\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1\,dx\,dy = 4\int_0^1\int_0^1 1\,dy\,dx = 4$$

Επιφανειακά Ολοκληρώματα

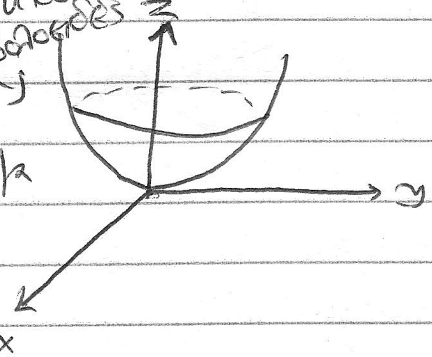
(1) Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$: διαισθητικά, π.χ. μια σφαίρα $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ (δηλ.) ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$).

Επίσης, π.χ. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D \wedge z=x^2+y^2\}$

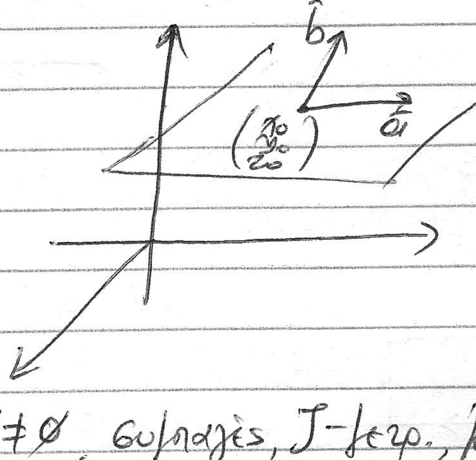
όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\} =$

$=\{(x,y,\underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)})\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D\} \Rightarrow E=\Gamma_f$, $f: D\to\mathbb{R}$

και $f(x,y)=x^2+y^2$



Ακόμα, $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}, \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$, $\bar a, \bar b$ ΓΑ



Ορισμός: Έστω $K\subset\mathbb{R}^2$, $K\neq\emptyset$ συμπαγές, J-μετρ., με $K\subset U\subset\mathbb{R}^2$, U: ανοικτό και $\bar\varphi: U\to\mathbb{R}^3$ μια C^1 1-1 συνάρτηση. Η συνάρτηση $\bar\varphi|_K: K\to\mathbb{R}^3$ ονομάζεται παραμετρική επιφάνεια $\bar\varphi$ με παραμετρικό πεδίο K και η εικόνα της $\bar\varphi(K)\subset\mathbb{R}^3$ επιφάνεια(*) με παραμετρικοποίηση $\bar\varphi|_K$. (*) καλύτερα, τμήμα επιφάνειας.